פתרון מטלה 07 — מבוא לטופולוגיה, 80516

2 ביוני 2026

שאלה 1

ניתן דוגמה למרחבים טופולוגיים X, Y ולקבוצה סגורה $C \subseteq X \times Y$ שההטלה שלה על X אינה סגורה.

הוכחה: $\square$

שאלה 2

יהי (X,τ) מרחב האוסדורף קומפקטי.

סעיף א'

נוכיח כי X רגולרי.

הוכחה: מרחב האוסדורף הוא מרחב T_2 כלומר לכל $x,y\in X$ כך ש־$x\neq y$ קיימות קבוצות פתוחות וזרות זו לזו $U,V\in\tau$ כך ש־$x\in U, y\in V$ ו־$U\cap V=\emptyset$.
X קומפקטי ולכן לכל כיסוי פתוח של X, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\tau$ יש תת־אוסף סופי $I_0\subseteq I$ עם $\bigcup_{\alpha\in I_0}U_\alpha=X$.
כדי להראות רגולריות עלינו להראות שלכל $x\in X$ ולכל $A\subseteq X$ סגורה המקיימת $x\notin A$ יש $U,V\in\tau$ זרות זו לזו כך ש־$x\in U, A\subseteq V$ וגם $U\cap V$.
יהי $x\in X$ ותהיי $A\subseteq X$ קבוצה סגורה כך ש־$x\notin A$.
מכך ש־$x\notin A$ הרי שלכל $a\in A$ מתקיים $x\neq a$ ומהיות המרחב האוסדורף קיימות U_a סביבה של x ו־V_a סביבה של a שעבורן מתקיים $U_a\cap V_a=\emptyset$ והאוסף $\{V_a\}_{a\in A}$ הוא כיסוי פתוח של A.
X קומפקטי ו־A סגורה ולכן A היא קבוצה קומפקטית ולכן ל־$\{V_a\}_{a\in A}$ יש תת־כיסוי סופי כלומר יש $a_1,a_2,...,a_n\in A$ כך ש־$A\subseteq\bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$ ונסמן $V=\bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$ שכמובן פתוח כאיחוד סופי של פתוחות.
נסמן $U=\bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$ ומכך שהחיתוך הוא סופי וזה חיתוך של קבוצות פתוחות נובע ש־U היא פתוחה.
U היא סביבה של x ו־V סביבה של A וכל U_{a_i} זרה ל־V_{a_i} ו־U מוכלת בתוך כל אחד מה־U_{a_i} כלומר U זרה לכל אחד מה־V_{a_i} ולכן $U\cap V=\emptyset$ וקיבלנו רגולריות. $\square$

סעיף ב'

נוכיח כי X נורמלי.

הוכחה: נאמר שמרחב הוא נורמלי אם ורק אם כל שתי קבוצות סגורות וזרות $A,B\subseteq X$ ניתנות להפרדה כלומר יש $U,V\in\tau$ זרות זו לזו כך ש־$A\subseteq U$ ו־$B\subseteq V$ וגם $U\cap V=\emptyset$.
תהיינה A,B סגורות וזרות זו לזו. מהרגולריות בסעיף הקודם נובע שלכל $b\in B$ מתקיים $b\notin A$ ולכן יש קבוצות פתוחות וזרות $U_b,V_b\subseteq X$ כך ש־$b\in V_b, A\subseteq U_b$ וגם $U_b\cap V_b=\emptyset$.
B סגורה והמרחב קומפקטי ולכן מטענה שראינו בהרצאה ש־B קומפקטית ומתקיים $B\subseteq\bigcup_{b\in B}V_b$ כלומר $\{V_b\}_{b\in B}$ כיסוי פתוח של B ולכן יש $\{B_j\}_{j=1}^k\subseteq B$ תת־כיסוי סופי ונסמנו $V:=\bigcup_{j=1}^k V_{b_j}$.
מתקיים $A\subseteq U_{b_j}$ לכל $j\in[k]$ ולכן בפרט A מוכלת בחיתוך שלהם ולכן נסמן $U:=\bigcap_{j=1}^k U_{b_j}$ שזה כמובן חיתוך סופי של פתוחות ולכן פתוח.
לכל $j\in[k]$ מתקיים $U_{b_j}\cap V_{b_j}=\emptyset$ ולכן $U\cap v=\emptyset$ וקיבלנו שהמרחב נורמלי. $\square$

שאלה 3

יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי ונוכיח כי X מטרזבילי אם ורק אם X ממנייה שנייה.

הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח X מרחב האוסדורף קומפקטי ומטרזבילי.

ברור כי X הוא מרחב לינדלוף (כי אם יש לי תת־כיסוי סופי בוודאי שיש לי תת־כיסוי בן־מנייה).

אם נראה שהוא גם ספרבילי נוכל להראות שהוא מקיים את אקסיומת המנייה השנייה: יהי $\varepsilon > 0$, מהיות המרחב לינדלוף ניתן לכסות את המרחב על־ידי כדורים של ε לכל נקודה במרחב ולכן בפרט יש כיסוי בן־מנייה של כל המרחב על־ידי קבוצות פתוחות לכל ε כזה. נניח ש־$\{B(x_n^m, \varepsilon_m)\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצה כזו עבור $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$ לכל m אז אם נגדיר $A = \{x_n^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ זו קבוצה בת־מנייה ועלינו להראות צפיפות: נניח ש־$x \in X$ ואם $x \in A$ סיימנו. אחרת, לכל $m \in \mathbb{N}$ קיים $n(m) \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $x \in B\left(x_{n(m)}^m, \frac{1}{m}\right)$ מהגדרת הכיסוי ולכן הסדרה $\left(x_{n(m)}^m\right)_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־x ולכן $x \in \overline{A}$ ולכן A צפופה ובת־מנייה ומעידה כי X ספרבילי.

אז אם ניקח $\mathcal{B} = \left\{B\left(a, \frac{1}{n}\right) \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\right\}$ עבור $A \subseteq X$ שצפופה ב־X מהספרביליות נקבל ש־$\mathcal{B}$ בסיס בן־מנייה ל־X – ברור כי הוא בן־מנייה ומטענה מההרצאה הוא גם בסיס לטופולוגיה ולכן X מקיים את אקסיומת המנייה השנייה.

$\Longrightarrow$ נניח ש־X מרחב האוסדורף קומפקטי וממנייה שנייה.

בשאלה הקודמת הוכחנו שכל מרחב האוסדורף קומפקטי הוא מרחב רגולרי ונתון האוסדורף ולכן גם T_1 אז X הוא מרחב רגולרי ו־T_1 (כלומר T_3) וממנייה שנייה ולכן ממשפט המטרזביליות של אוריסון נקבל ש־X מרחב מטרזבילי. $\square$

שאלה 4

מרחב טופולוגי X נקרא מטרזבילי מקומית אם לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $x \in U$ כך ש־U מטרזבילית עם טופולוגיית התת־מרחב.
יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי ונניח ש־X מטרזבילי מקומית, נוכיח ש־X מטרזבילי.

הוכחה: מרחב האוסדורף קומפקטי מהשאלה הראשונה הוא גם רגולרי ונורמלי.
לכל $x \in X$ יש סביבה פתוחה מטרזבילית U_x ו־$\{U_x\}_{x\in X}$ הוא כיסוי פתוח של X ומהיות X קומפקטי נובע שיש לו תת־כיסוי סופי $\{U_x\}_{x\in I}$ עבור $I \subseteq X$ שהם כולם מטריזבליים ו־$X \subseteq \bigcup_{x\in I} U_x$.
TODOOOOOOOOOOOOOOOOOOO $\square$

שאלה 5

תהיי I קבוצה ויהי $X = [0,1]^I$ המצוייד בטופולוגיית המכפלה. תהיי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת תת־קבוצה סופית $F \subseteq I$ כך שלכל $x, y \in X$ המזדהים ב־F (כלומר לכל $i \in F$ מתקיים $x(i) = y(i)$) מתקיים

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

הוכחה:

$\square$

שאלה 6

נזהה את מרחב המטריצות $M_n(\mathbb{R})$ עם $\mathbb{R}^{n^2}$.

סעיף א'

נראה שאם למטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ יש n ערכים עצמיים שונים אזי $f_A(A) = 0$.
נסמן ב־U את קבוצת המטריצות עם n ערכים עצמיים.

הוכחה: □

סעיף ב'

נשתכנע שהפונקציה $\mathbb{R}^{n^2} \mapsto \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $A \mapsto f_A(A)$ היא פולינום ונסיק שהקבוצה

$$Z = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid f_A(A) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

סגורה בטופולוגיית זירסקי ומכילה את U.
נראה כי $Z = M_n(\mathbb{R})$ וזה יוכיח את משפט קיילי המילטון.

הוכחה: □

סעיף ג'

יהי $x \in \mathbb{R}^m$ ויהי $\varepsilon > 0$, נוכיח שהכדור $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^m$ צפוף בטופולוגיית זירסקי.

הוכחה:

□

סעיף ד'

נסמן $D = \mathrm{diag}(1, 2, ..., n) \in M_n(\mathbb{R})$ ונוכיח שהקבוצה

$$\left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall m \in \{0, ..., n\}, f_A\left(m + \frac{1}{2}\right) f_D\left(m + \frac{1}{2}\right) > 0\right\}$$

זו סביבה פתוחה של D בטופולוגיה הסטנדרטית ונעזר במשפט ערך הביניים כדי להסיק שקיים כדור $B(D, \varepsilon) \subseteq U$.

הוכחה:

□

סעיף ה'

נסיק את משפט קיילי המילטון למטריצות ממשיות.

הוכחה:

□